

# PENERAPAN INTEGRAL UNTUK MENGHITUNG TITIK BERAT DAN MOMEN INERSIA SUATU BIDANG DAN VOLUME BENDA PUTAR

Suroso <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Jurusan Teknik Sipil, Politeknik Negeri Semarang  
Jln. Prof. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang, 50275  
Email: [suroso@polines.ac.id](mailto:suroso@polines.ac.id)

## ABSTRAK

*Dalam menerapkan integral untuk menghitung titik berat dan momen inersia suatu bidang dan volume benda putar, langkah pertama adalah membuat sketsa atau gambar bidang tersebut dan dilengkapi dengan garis atau kurva beserta persamaannya yang membatasi bidang tersebut. Selanjutnya harus bisa memahami dengan baik langkah-langkah dalam menghitung luas bidang dan volume benda putar dengan integral. Setelah itu baru menghitung titik berat dan momen inersia tanpa mengalami kesulitan asalkan sudah bisa memahami langkah-langkah sebelumnya dengan baik.*

**Kata kunci:** Penerapan integral, titik berat, momen inersia.

## PENDAHULUAN

### Latar Belakang

Dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, matematika banyak digunakan untuk mempermudah pemecahan masalah, misalkan untuk menghitung titik berat dan momen inersia suatu bidang. Untuk bidang yang bentuknya sederhana, misalkan bidang yang berbentuk persegi panjang, titik berat bidang tersebut akan lebih mudah ditentukan yaitu terletak diperpotongan diagonal dari persegi panjang tersebut. Akan tetapi untuk bidang yang dibatasi kurva lengkung, untuk menentukan titik berat bidang tersebut tidaklah mudah. Karena untuk menghitung titik berat harus dapat menghitung luas bidang, dan untuk menghitung luas bidang blm ada rumusnya, sehingga untuk menghitung titik berat bidang tersebut juga akan mengalami kesulitan. Untuk mengatasi permasalahan tersebut dibutuhkan ilmu matematika yaitu integral. Dengan integral, luas bidang dan titik berat bidang, baik bidang yang dibatasi garis

lurus atau kurva lengkung dapat dihitung dengan mudah.

### Tujuan

Tujuan dari penulisa artikel ini adalah menerapkan integral untuk menghitung titik berat dan momen inersia suatu bidang dan volume benda putar.

## TINJAUAN PUSTAKA

### Pengertian Integral dan Luas Bidang Dengan Integral

Jika  $F(x)$  adalah fungsi yang turunannya  $F'(x) = f(x)$  pada selang tertentu dari sumbu  $x$ , maka  $F(x)$  disebut anti turunan atau integral tertentu dari  $f(x)$  dan ditulis dengan:  $F(x) = \int f(x) dx$ . Jika  $a$  dan  $b$  adalah batas bawah dan batas atas integral maka ditulis:  $\int_a^b f(x) dx$  dan dinamakan integral tertentu dari  $f(x)$  terhadap  $x$  dari  $x = a$  sampai  $x = b$ . (Frank Ayres, JR, 1985).

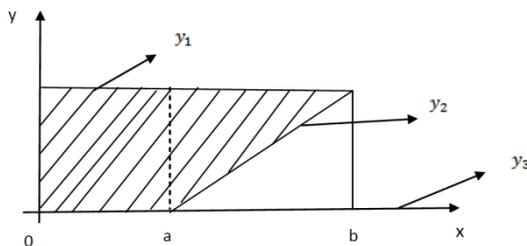
Jika  $f(x)$  kontinu dalam selang  $a \leq x \leq b$  dan  $F(x)$  adalah integral tak tentu dari  $f(x)$ , maka

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Jika  $y = f(x)$  adalah kontinu dan tidak negative dalam selang  $a \leq x \leq b$ , maka

$\int_a^b f(x) dx$  adalah luas bidang yang dibatasi sumbu  $x$ , garis  $x = a$ , garis  $x = b$  serta kurva  $y = f(x)$ . (Frank Ayres, JR, 1985 dan Leithold Hutahaean, 1988). Dengan cara yang sama, luas bidang yang diarsir berikut gambar 1 dapat dihitung dengan integral sebagai berikut:

Misal luas bidang yang diarsir =  $A$  maka  $A = \int_0^a y_1 - y_3 dx + \int_a^b y_1 - y_2 dx$ .



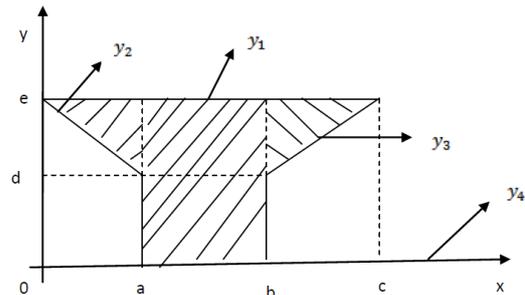
Gambar 1.

## PEMBAHASAN APLIKASI INTEGRAL UNTUK MENGHITUNG TITIK BERAT

### Titik Berat Suatu Bidang

Dalam mekanika, massa dipandang sebagai benda yang terpusatkan pada suatu titik yang disebut titik pusat massa (titik pusat gravitasi). Untuk benda yang homogen, titik ini berimpit dengan pusat geometriknya atau titik berat. (Frank Ayres, JR, 1985 dan K A Stroud, Erwin Sucipto, 1989).

Untuk menghitung titik berat suatu bidang dengan integral, kita harus menghitung dulu luas bidang tersebut dengan integral. Perhatikan bidang yang dibatasi oleh sumbu  $x$ , sumbu  $y$ , garis  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ , garis  $x = a$  dan garis  $x = b$ , seperti Gambar 2 yang diarsir berikut:



Gambar 2.

Menghitung luas bidang tersebut dengan integral, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Mencari persamaan garis  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ , dan  $y_4$
2. Bidang tersebut, dibagi menjadi tiga segmen, untuk batas integral yaitu:  $0 \leq x \leq a$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $b \leq x \leq c$ .
3. Selanjutnya menghitung luas bidang tersebut dengan integral, yaitu:

$$A = \int_0^a y_1 - y_2 dx + \int_a^b y_1 - y_4 dx + \int_b^c y_1 - y_3 dx$$

Dengan  $A =$  luas bidang yang diarsir.

Contoh:

Misalkan pada gambar 2. di atas diketahui:  $a = 4$ ,  $b = 8$ ,  $c = 12$ ,  $d = 4$  dan  $e = 6$

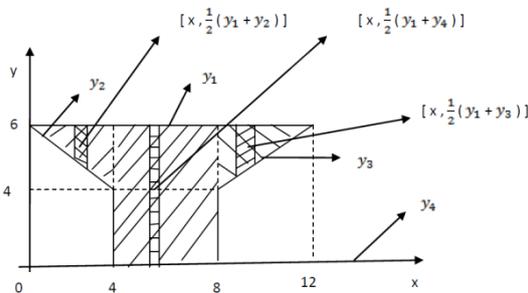
Mencari persamaan garis  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ , dan  $y_4$ .

- persamaan garis  $y_1 = 6$
- persamaan garis  $y_2$  melalui titik  $(a,d) = (4,4)$  dan  $(0,e) = (0,6)$ , didapat  $y_2 = -\frac{1}{2}x + 6$
- persamaan garis  $y_3$  melalui titik  $(b,d) = (8,4)$  dan  $(c,e) = (12,6)$ , didapat  $y_3 = \frac{1}{2}x$
- $y_4 = 0$

$$\text{Sehingga } A = \int_0^a y_1 - y_2 dx + \int_a^b y_1 - y_4 dx + \int_b^c y_1 - y_3 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^4 6 - \left(-\frac{1}{2}x + 6\right) dx + \int_4^8 6 - 0 dx \\
&+ \int_8^{12} 6 - \frac{1}{2}x dx \\
&= \int_0^4 \frac{1}{2}x dx + \int_4^8 6 dx + \int_8^{12} 6 - \frac{1}{2}x dx \\
&= \frac{1}{4}x^2 \Big|_0^4 + 6x \Big|_4^8 + 6x - \frac{1}{4}x^2 \Big|_8^{12} \\
&= 32 \text{ satuan luas.}
\end{aligned}$$

Setelah menghitung luas bidang tersebut dengan integral, untuk menentukan titik berat bidang yang diarsir dengan integral langkah-langkahnya sebagai berikut:



**Gambar 3.**

1. Menentukan titik berat masing-masing pita seperti pada gambar 3, yaitu:

$$\left[ x, \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \right], \left[ x, \frac{1}{2}(y_1 + y_4) \right], \text{ dan } \left[ x, \frac{1}{2}(y_1 + y_3) \right].$$

2. Menentukan momen terhadap sumbu x atau  $M_x$  yaitu:

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_0^4 \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) dx \\
&+ \int_4^8 \frac{1}{2}(y_1 + y_4)(y_1 - y_4) dx + \\
&\int_8^{12} \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(y_1 - y_3) dx . \\
&= \frac{1}{2} \int_0^4 y_1^2 - y_2^2 dx + \frac{1}{2} \int_4^8 y_1^2 - y_4^2 dx + \frac{1}{2} \int_8^{12} y_1^2 - y_3^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^4 -\frac{1}{4}x^2 + 3x dx + \frac{1}{2} \int_4^8 36 dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_8^{12} 36 - \frac{1}{4}x^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^4 + [18x]_4^8 \\
&+ \frac{1}{2} \left[ 36x - \frac{1}{12}x^3 \right]_8^{12}
\end{aligned}$$

$$= \frac{308}{3}$$

3. Menentukan momen terhadap sumbu y atau  $M_y$  yaitu:

$$\begin{aligned}
M_y &= \int_0^4 x(y_1 - y_2) dx + \int_4^8 x(y_1 - y_4) dx \\
&+ \int_8^{12} x(y_1 - y_3) dx \\
&= \int_0^4 \frac{1}{2}x^2 dx + \int_4^8 6x dx + \\
&\int_8^{12} 6x - \frac{1}{2}x^2 dx \\
&= \left[ \frac{1}{6}x^3 \right]_0^4 + [3x^2]_4^8 + \left[ 3x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right]_8^{12} \\
&= 192
\end{aligned}$$

4. Menghitung titik berat bidang yang diarsir  $(\bar{x}, \bar{y})$  dengan rumus sebagai berikut:

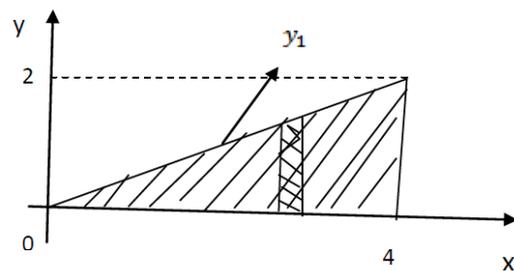
$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{M_y}{A} & \bar{y} &= \frac{M_x}{A} \\
\bar{x} &= \frac{192}{32} & \bar{y} &= \frac{308}{32} \\
\bar{x} &= 6 & \bar{y} &= 3,2
\end{aligned}$$

Jadi titik berat bidang yang diarsir adalah :  $(\bar{x}, \bar{y}) = (6, 3,2)$ .

### Titik Berat Benda Putar

Untuk menghitung titik berat suatu benda putar dengan integral, kita harus menghitung dulu volume benda putar tersebut dengan integral.

Perhatikan bidang yang dibatasi oleh sumbu x, garis  $y_1$  dan garis  $x = 4$  seperti Gambar 4 berikut:



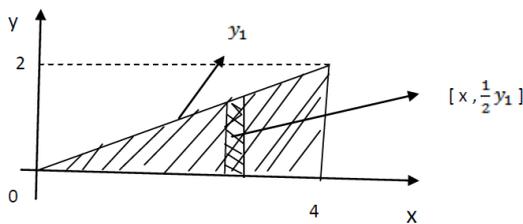
**Gambar 4.**

Jika bidang yang diarsir tersebut diputar sekeliling sumbu x, volumenya dapat dihitung dengan integral sbb :

1. Mencari persamaan garis  $y_1$  yang melalui titik (0,0) dan titik (4,2) dan hasilnya adalah:  $y_1 = \frac{1}{2}x$
2. Membuat pita wakil tegak lurus sumbu putar dan persegi panjang yang didekati pita itu.
3. Menghitung volume benda putar dengan rumus:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 y_1^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\pi \int_0^4 x^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\pi \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4 \\ &= \frac{16}{3}\pi \text{ satuan volume} \end{aligned}$$

Setelah menghitung volume benda putar dengan integral, untuk menentukan titik berat benda putar dengan integral langkah-langkahnya sebagai berikut:



**Gambar 5.**

1. Menentukan titik berat pita  $[x, \frac{1}{2}y_1]$  seperti Gambar 5. di atas.
2. Menentukan momen benda terhadap bidang yang melalui titik asal dan tegak lurus sumbu putar yaitu sumbu x atau  $M_{yz}$ , dengan  $M_{yz} = \pi \int_0^4 x y_1^2 dx$
3. Menghitung titik berat benda putar  $[\bar{x}, \bar{y}]$ , dengan  $\bar{y} = 0$  karena bidang diputar sekeliling sumbu x, dengan rumus:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V}$$

$$\bar{x} = \frac{16\pi}{\frac{16\pi}{3}}$$

$$\bar{x} = 3$$

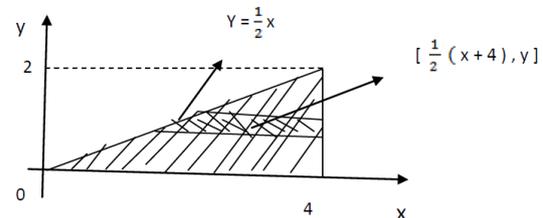
Jadi titik berat benda putar tersebut, yaitu  $[\bar{x}, \bar{y}] = [3, 0]$ .

### Momen Inersia Suatu Luasan

Momen inersia **I** suatu luasan terhadap garis **L** pada bidangnya didapatkan dengan cara sbb :

1. Membuat sketsa daerahnya dan pita yang sejajar dengan garis L dan persegi panjang yang didekati serta titik berat pita.
2. Dibentuk hasilkali luas persegi panjang dan kuadrat jarak titik beratnya dari garis L.
3. Menghitung momen inersia I suatu luasan tersebut dengan integral. (Frank Ayres, JR, 1985, dan K A Stroud , Erwin Sucipto, 1989).

Sebagai contoh perhatikan bidang yang diarsir Gambar 6) berikut:



**Gambar 6.**

Akan dihitung momen inersia I dari bidang yang diarsir terhadap garis L (sumbu x) atau  $I_x$  sebagai berikut:

$$I_x = \int_0^2 y^2 (4 - x) dy$$

$$I_x = \int_0^2 y^2 (4 - 2y) dy$$

$$I_x = \int_0^2 4y^2 - 2y^3 dy$$

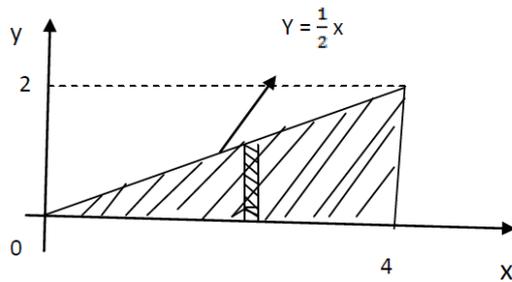
$$I_x = \left[\frac{4}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^4\right]_0^2$$

$$I_x = \frac{8}{3}$$

Jadi momen inersia dari bidang tersebut terhadap sumbu x atau  $I_x = \frac{8}{3}$ .

Atau dengan cara lain yaitu pita dibuat tegak lurus sumbu x (Gb : 7)

dan momen inersia dihitung dengan cara sebagai berikut:



**Gambar 7.**

$$I_x = \int_0^4 y^2 \cdot \frac{1}{3} y \, dx$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_0^4 y^3 \, dx$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_0^4 \left(\frac{1}{2} x\right)^3 \, dx$$

$$I_x = \frac{1}{24} \int_0^4 x^3 \, dx$$

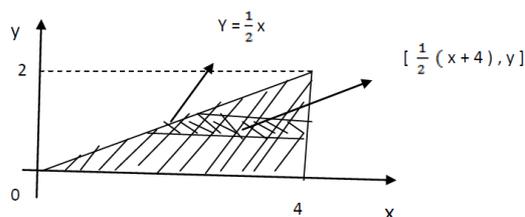
$$I_x = \frac{1}{24} \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_0^4$$

$$I_x = \frac{8}{3}$$

### Momen Inersia Suatu Benda Putar

Momen inersia suatu benda yang terbentuk dari perputaran suatu bidang sekeliling garis  $L$  pada bidangnya didapatkan dengan cara sebagai berikut:

1. Membuat sketsa bidangnya dan pita yang sejajar garis  $L$  sebagai sumbu putar.
2. Dibentuk hasil kali volume yang terbentuk oleh perputaran pita sekeliling sumbu putar dan kuadrat jarak titik berat pita dari sumbu putar.
3. Menghitung momen inersia suatu benda putar tersebut dengan integral.



**Gambar 8.**

$$I_x = 2 \pi \int_0^2 y^2 \cdot y(4-x) \, dy$$

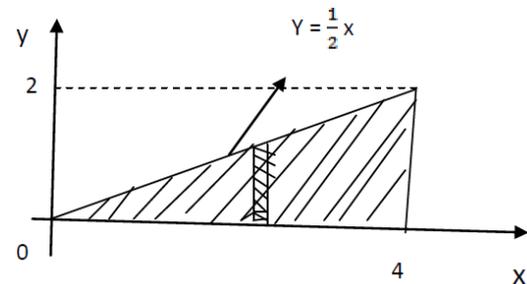
$$I_x = 2 \pi \int_0^2 y^3 (4-2y) \, dy$$

$$I_x = 2 \pi \int_0^2 4y^3 - 2y^4 \, dy$$

$$I_x = 2 \pi \left[ y^4 - \frac{2}{5} y^5 \right]_0^2$$

$$I_x = \frac{32 \pi}{5}$$

Atau dengan cara lain yaitu pita dibuat tegak lurus sumbu putar seperti Gambar 9. Sebagai berikut:



**Gambar 9.**

Momen inersia dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$I_x = \frac{1}{2} \pi \int_0^4 y^4 \, dx$$

$$I_x = \frac{1}{2} \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{2} x\right)^4 \, dx$$

$$I_x = \frac{1}{32} \pi \int_0^4 x^4 \, dx$$

$$I_x = \frac{1}{32} \pi \left[ \frac{1}{5} x^5 \right]_0^4$$

$$I_x = \frac{32 \pi}{5}$$

### SIMPULAN

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa:

1. Untuk menghitung titik berat dan momen inersia suatu bidang dan volume benda putar dengan

integral, harus bisa menghitung luas bidang dan volume benda putar tersebut dengan integral.

2. Untuk menghitung luas bidang dan volume benda putar, langkahnya adalah membuat sketsa bidang dalam sumbu  $x$  dan sumbu  $y$ , membuat pita pada bidang untuk menentukan batas-batas integral, selanjutnya menghitung luas bidang dan volume benda putar dengan integral .
3. Untuk menghitung titik berat, langkahnya dimulai dengan membuat titik berat pita, menentukan momen terhadap sumbu  $x$  ( $M_x$ ) dan sumbu  $y$  ( $M_y$ ), selanjutnya menghitung titik berat tersebut dengan integral .
4. Untuk menghitung momen inersia, langkahnya dimulai dengan membuat pita sejajar dengan garis

$L$  (sumbu  $x$ ) dan titik berat pita, kemudian dibentuk: hasil kali luas persegi panjang (luas pita) dan kuadrat jarak titik beratnya dari garis  $L$ , serta hasil kali volume benda putar dan kuadrat jarak titik beratnya dengan garis  $L$ , selanjutnya menghitung momen inersia dengan integral.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Frank Ayres. 1985. *Kalkulus*. halaman 23. Jakarta: Erlangga.
- K.S. Stroud dan Erwin Sucipto. 1989. *Matematika Untuk Teknik*. halaman 220). Jakarta: Erlangga.
- K.S. Stroud dan Erwin Sucipto. 1989. *Matematika Untuk Teknik*. halaman 330). Jakarta: Erlangga.
- Leithoid, Louis. 1988. *Kalkulus Dan Ilmu Ukur Analitik*. halaman 183. Jakarta: Erlangga.