# PENERAPAN DIFERENSIASI SUATU FUNGSI UNTUK MENGHITUNG KECEPATAN GERAK BENDA

***Suroso* [1)]**

[1)] *Jurusan Teknik Sipil, Politeknik Negeri Semarang*
*Jln. Prof. Soedarto, SH, Tembalang, Semarang, 50275*
*Email: suroso@polines.ac.id*

***ABSTRAK***

*Dalam menerapkan diferensiasi suatu fungsi untuk menghitung kecepatan gerak benda, langkah pertama yang harus diperhatikan adalah variabel-variabel apa saja yang mengalami perubahan atau pergerakan dalam suatu peristiwa atau kejadian. Kemudian ditentukan model atau fungsi matematika yang menghubungkan variabel-variabel yang mengalami perubahan atau pergerakan tersebut. Selanjutnya fungsi tersebut didiferensiasikan terhadap variabel waktu t. Hasil dari diferensiasi fungsi tersebut digunakan untuk menghitung kecepatan gerak benda atau variabel-variabel yang mengalami perubahan atau pergerakan dalam suatu kejadian atau peristiwa tersebut.*

***Kata kunci**: Penerapan diferensiasi, kecepatan gerak benda.*

## PENDAHULUAN

Matematika sebagai alat bantu untuk memecahkan permasalahan dalam berbagai bidang disiplin ilmu mempunyai peranan yang sangat penting. Dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi matematika semakin banyak digunakan untuk mempermudah pemecahan masalah, sebagai alat untuk mengambil keputusan ataupun perencanaan. Penggunaan matematika dalam berbagai disiplin ilmu dinamakan sebagai matematika terapan. Contoh matematika terapan antara lain penerapan diferensiasi suatu fungsi dengan satu atau lebih variabel bebas, yang selanjutnya dinamakan penerapan diferensiasi suatu fungsi. Dalam diferensiasi suatu fungsi, jika semua variabel, baik variabel terikat maupun variabel bebas adalah fungsi dari waktu t, maka dapat diaplikasikan atau diterapkan untuk menghitung kecepatan gerakan benda antara lain debit air.

Adapun tujuan dari artikel ini adalah menerapkan diferensiasi suatu fungsi dengan satu atau lebih variabel bebas untuk menghitung kecepatan gerak benda.

## TINJAUAN PUSTAKA

Pertambahan $\Delta x$ suatu variabel x adalah perubahan dalam x bila x membesar atau mengecil dari satu nilai x = $x_0$ menjadi nilai lain x = $x_1$ pada jangkauannya. Disini, $\Delta x$ = $x_1$ - $x_0$ dan dapat ditulis $x_1$ = $x_0$ + $\Delta x$. Bila variabel x diberi pertambahan $\Delta x$ terhadap x = $x_0$ (artinya jika x berubah dari x = $x_0$ menjadi x = $x_0$ + $\Delta x$ ) dan dengan demikian sebuah fungsi y = f(x) diberi pertambahan $\Delta y$ = f($x_0$ + $\Delta x$) – f($x_0$) dari y = f($x_0$), hasil bagi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = $\frac{perubahan\ dalam\ y}{perubahan\ dalam\ x}$ disebut laju perubahan rata-rata dari fungsi pada selang antara x = $x_0$ dan x = $x_0$ + $\Delta x$. Turunan suatu fungsi y = f(x) terhadap x pada titik x = $x_0$ didefinisikan sebagai $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_{0} + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ asalkan limitnya ada. Limit ini juga disebut laju perubahan sesaat (atau mudahnya, laju perubahan) dari y terhadap x pada x= $x_0$. Dalam mencari turunan indeks 0 biasanya dihilangkan dan turunan fungsi y = f(x) terhadap x diperoleh dari $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Turunan y = f(x) terhadap x dapat dinyatakan oleh salah satu simbol $\frac{dy}{dx}$, $y'$ atau $f'$(x) (Frank Ayres, 1985).

Turunan fungsi y = f(x) juga didefinisikan sebagai fungsi yang nilainya disetiap bilangan x di dalam daerah asal f diberikan oleh $f'$(x) = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, jika limitnya ada, turunan fungsi f dilambangkan oleh $f'$(x) (Louis Leithoid, 1988).

Untuk menentukan turunan suatu fungsi dengan menggunakan definisi seperti di atas prosesnya biasanya agak panjang, sehingga digunakan rumus-rumus baku antara lain seperti berikut: Jika f(x) = a $x^n$ + b $x^m$ + c maka, $f'$(x) = na$x^{n-1}$ + mb$x^{m-1}$ (K.S. Stroud dan Erwin Sucipto, 1989).

Selanjutnya diferensial dari y atau dy didifinisikan sebagai: $dy = f'$(x) dx. Jika y didiferensiasikan terhadap waktu t, didapat: $\frac{dy}{dt}$ = $f'$(x) $\frac{dx}{dt}$ (Leitholh H, 1988).

Contoh: Jika diketahui fungsi y = 3 $x^2$ + 6 x + 5 maka $\frac{dy}{dx}$ = 6 x + 6 dan $\frac{dy}{dt}$ = ( 6 x + 6 ) $\frac{dx}{dt}$.

Dengan cara yang sama untuk suatu fungsi dengan variabel bebas lebih dari satu, misalkan Z = f (x,y), jika Z didiferensialkan didapat: dZ = $\frac{\partial Z}{\partial x}$ dx + $\frac{\partial Z}{\partial y}$ dy. Selanjutnya jika Z didifernsiasikan terhadap waktu t didapat: $\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$, *dimana*: $\frac{\partial Z}{\partial x}$ adalah turunan parsial dari Z terhadap variabel x dengan menganggap variabel y konstan, dan $\frac{\partial Z}{\partial y}$ adalah turunan parsial dari Z terhadap variabel y dengan menganggap variabel x konstan (K.S. Stroud dan Erwin Sucipto, 1989).

Contoh: Jika diketahui fungsi Z = 2 $x^3y^2$ + 3 $x^3$ + 2 $y^4$ + 5, maka $\frac{dZ}{dt}$ = $\frac{\partial Z}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ = ( 6$x^2y^2$ + 6 $x^2$ ) $\frac{dx}{dt}$ + ( 4 $x^3$y + 8 $y^3$ ) $\frac{dy}{dt}$.

## CONTOH DAN PEMBAHASAN

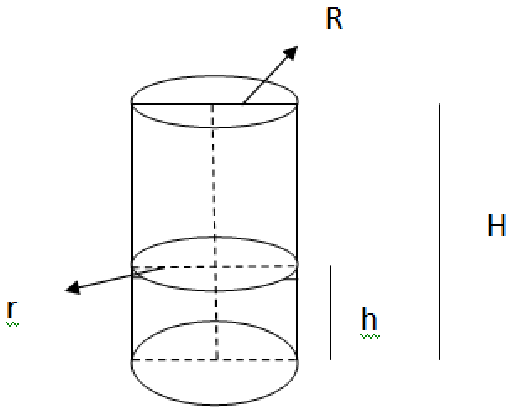
Penerapan diferensiasi suatu fungsi untuk menghitung kecepatan gerak benda. Dengan menggunakan diferensiasi suatu fungsi, baik suatu fungsi dengan satu atau lebih variabel bebas, dapat diterapkan untuk menghitung kecepatan sesaat gerak suatu benda.

Langkah pertama, sebelum menghitung kecepatan gerak benda, kita harus mengetahui variabel-variabel apa saja yang mengalami perubahan dalam peristiwa atau kejadian tersebut, selanjutnya kita harus memodelkan kejadian tersebut kedalam fungsi matematika. Setelah fungsi matematikanya ditentukan, fungsi tersebut dideferensiasikan terhadap waktu t, untuk menghitung kecepatan gerak benda tersebut.

### Penerapan Diferensiasi Suatu Fungsi Dengan Satu Variabel Bebas

Disini pemodelan fungsi matematika dari suatu kejadian atau peristiwa hanya ada dua variabel yang mengalami perubahan yaitu variabel terikat dan variabel bebas.

Misalkan suatu bak penampungan air berbentuk tabung diisi dengan air dengan debit tertentu.




**Gambar 1.** Tangki berbentuk tabung

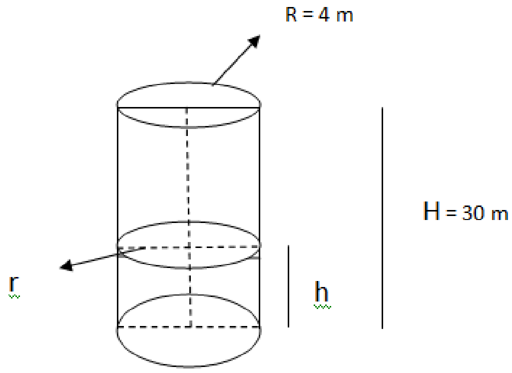
Dalam kejadian ini, variabel yang mengalami perubahan adalah volume air V yang makin lama makin besar dan tinggi permukaan air h yang makin tinggi. Sementara luas permukaan air dan jari-jari permukaan air tetap (lihat gambar 1). Fungsi matematika yang menghubungkan kejadian ini adalah V= $\pi r^2$ h, jadi V= f (h), karena r tetap / konstan.

V= variabel terikat dan h variabel bebas, sehingga variabel bebasnya hanya satu yaitu h.

Jika fungsi V= $\pi r^2$h, dideferensiasikan terhadap waktu t didapat: $\frac{dV}{dt}$ = $\pi r^2 \frac{dh}{dt}$, dimana $\frac{dV}{dt}$ adalah kecepatan perubahan volume terhadap waktu t atau debit dan $\frac{dh}{dt}$ adalah kecepatan naiknya permukaan air. Jika $\frac{dV}{dt}$ diketahui maka $\frac{dh}{dt}$ dapat dihitung dan sebaliknya.

Contoh: Air dialirkan ke dalam bak / tangki berbentuk silinder dengan R= 4 m dan tinggi H= 30 m, dengan debit 3 $\frac{m^3}{mnt}$. Berapa kecepatan naiknya permukaan air dalam silinder tersebut?

Jawab: Langkah pertama adalah menggambar tangki yang berbentuk tabung.




**Gambar 2.** Tangki berbentuk tabung dengan H= 30 m

Dalam kejadian ini yang mengalami perubahan adalah volume air (V) dan tinggi permukaan air (h) sedangkan jari-jari permukaan air (r) konstan.

Diketahui: $\frac{dV}{dt} = 3\ \frac{m^3}{mnt}$,

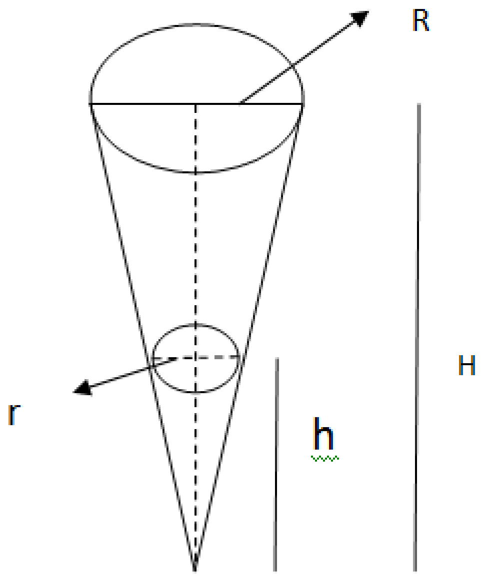
ditanya: $\frac{dh}{dt}$ = ….

V = $\pi r^2$h, didiferensiasikan terhadap variabel waktu t, didapat: $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi r^2}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\pi 4^2}.\ 3 = \frac{3}{16\pi}\frac{m}{mnt}$
Jadi jika air yang dialirkan ke dalam bak penampungan air dengan debit 3$\frac{m^3}{mnt}$, maka permukaan air dalam bak naik dengan kecepatan $\frac{3}{16\pi}\frac{m}{mnt}$.

**Penerapan Diferensiasi Suatu Fungsi Dengan Dua Variabel Bebas**

Dalam pembahasan ini, pemodelan atau fungsi matematika yang menghubungkan variabel-variabel yang mengalami perubahan dalam suatu kejadian, adalah satu variabel terikat dan dua variabel bebas.

Misalkan sebuah tangki berbentuk kerucut terbalik dengan jari-jari bidang atas R dan tingginya H seperti gambar 3.




**Gambar 3.** Tangki berbentuk kerucut

Air dialirkan ke dalam tangki dengan debit tertentu. Dalam peristiwa ini ada beberapa variabel yang mengalami perubahanya itu volume air yang semakin besar, luas permukaan air yang luasnya makin besar, permukaan air yang makin tinggi dan jari-jari permukaan air yang makin panjang. Jadi ada empat variabel yang mengalami perubahan dalam kejadian tersebut, yaitu volume (V), tinggi (h), jari-jari (r) dan luas permukaan air (A). Keempat variabel tersebut dihubungkan oleh dua persamaan matematika yaitu:

1) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
2) $V = \frac{1}{3} A h$

Yang tidak lain adalah rumus volume kerucut.

Untuk rumus 1) variabel terikat V, tergantung variabel bebas r dan h, sedangkan rumus 2) variabel terikat V, tergantung variabel bebas A dan h. Jadi kedua rumus tersebut terdiri dari satu variabel terikat dan dua variabel bebas.

Apabila rumus yang pertama yaitu $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ dideferensiasikan terhadap variabel waktu t, hasilnya adalah: $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$

Dimana: $\frac{dV}{dt}$ adalah kecepatan perubahan volume atau debit $\frac{dr}{dt}$ adalah kecepatan perubahan jari-jari $\frac{dh}{dt}$ adalah kecepatan naiknya permukaan air $\frac{\partial V}{\partial r}$ adalah diferensiasi parsiil dari variabel V terhadap variabel r, dengan menganggap variabel h konstan.

$\frac{\partial V}{\partial h}$ adalah diferensiasi parsiil dari variabel V terhadap variabel h, dengan menganggap variabel r konstan. Sehingga: $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi$ r h dan $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{3}\pi r^2$.

Sedangkan rumus yang kedua yaitu $V = \frac{1}{3}$ A h, dideferensiasikan terhadap variabel waktu t, hasilnya adalah: $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial A}\frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$.

Dimana: $\frac{dA}{dt}$ adalah kecepatan perubahan luas permukaan air $\frac{\partial V}{\partial A}$ adalah diferensiasi parsisil dari variabel V terhadap variabel A, dengan menganggap variabel h konstan, dan $\frac{\partial V}{\partial h}$ adalah diferensiasi parsiil dari variabel V terhadap variabel h, menganggap variabel A konstan. Sehingga : $\frac{\partial V}{\partial A} = \frac{1}{3}$ h dan $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{3}$ A.

Dari kedua rumus tersebut, yaitu: rumus pertama $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$ dan rumus yang kedua $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial A}\frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$, jika diketahui :

1) $\frac{dV}{dt}$ dan $\frac{dh}{dt}$, maka $\frac{dr}{dt}$ dapat dihitung dengan rumus yang pertama dan

$\frac{dA}{dt}$ dapat dihitung dengan rumus yang kedua.

2) $\frac{dA}{dt}$dan$\frac{dh}{dt}$, maka untuk menghitung $\frac{dr}{dt}$ menggunakan rumus yang kedua dulu untuk mendapatkan harga $\frac{dV}{dt}$, selanjutnya menggunakan rumus yang pertama untuk memperoleh harga $\frac{dr}{dt}$.

Contoh: 1

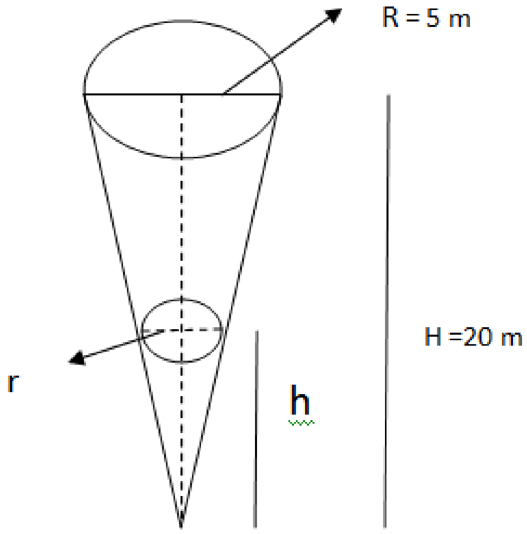
Sebuah tangki berbentuk kerucut terbalik dengan jari-jari 5 m dan tingginya 20 m. Air dialirkan kedalam tangki dengan kecepatan 3 $\frac{m^3}{mnt}$, dan pada saat kedalaman air 8 meter, permukaan air naik dengan kecepatan $\frac{3}{4\pi}\frac{m}{mnt}$, hitunglah: a) Berapa kecepatan perubahan jari-jari permukaan air pada saat kedalaman air 8 meter tersebut? b) Berapa kecepatan perubahan luas permukaan air pada saat kedalaman air 8 meter tersebut?

Jawab:

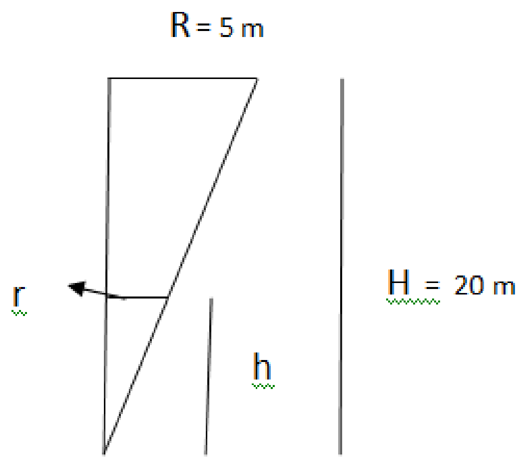
Diketahui : $\frac{dV}{dt} = 3\ \frac{m^3}{mnt}$ dan $\frac{dh}{dt}$ [ h = 8 m ] = $\frac{3}{4\pi}\frac{m}{mnt}$

Ditanya : a) $\frac{dr}{dt}$ [ h = 8 m ] =….? dan b) $\frac{dA}{dt}$[ h = 8 m ] =…. ?

Selanjutnya adalah menggambar tangki dan mencari hubungan antara h, r dan A pada saat kedalaman air atau h = 8 m tersebut.




**Gambar 4.** Tangki berbentuk kerucut dengan H= 20 m




**Gambar 5.** Setengah kerucut

$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} \rightarrow \frac{r}{5} = \frac{h}{20} \rightarrow r = \frac{1}{4}\ h$

Untuk h = 8 m, jari-jari permukaan air atau r = 2 m dan luas permukaan air atau A = $\pi r^2$ = 4 $\pi m^2$.

Selanjutnya untuk menjawab soal a), kita gunakan rumus yang pertama sebagai berikut:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}}{\frac{\partial V}{\partial r}}$$

$\frac{dV}{dt} = 3\,\frac{m^3}{mnt}$ , $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi$, $\frac{dh}{dt} = \frac{3}{4\pi}$ , $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi r\,h = \frac{32}{3}\pi$

$\frac{dr}{dt}$[ h = 8 m , r = 2 m ] = $\frac{3}{16\pi}\frac{m}{mnt}$ .

Jadi pada saat kedalaman air 8 m, jari-jari permukaan air berubah dengan kecepatan $\frac{3}{16\pi}\frac{m}{mnt}$.

Untuk menjawab soal b) digunakan rumus yang kedua sebagai berikut:

$\frac{dV}{dt} = 3\,\frac{m^3}{mnt}$ , $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{3}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi$, $\frac{dh}{dt} = \frac{3}{4\pi}$ , $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi r\,h = \frac{32}{3}\pi$

$\frac{dr}{dt}$[ h = 8 m , r = 2 m ] = $\frac{3}{16\pi}\frac{m}{mnt}$ .

Sehingga:

$\frac{dA}{dt}$ [h = 8 m, A = 4 $\pi m^2$ ] = $\frac{3}{4}\frac{m^2}{mnt}$.

Jadi pada saat kedalaman air 8 meter, luas permukaan air berubah dengan kecepatan $\frac{3}{4}\frac{m^2}{mnt}$.

Contoh : 2

Jika air yang dialirkan ke dalam tangki tersebut di atas, debitnya tidak diketahui dan diketahui pada saat luas permukaan air atau A = 4 $\pi m^2$, luas permukaan air berubah dengan kecepatan $\frac{3}{4}\frac{m^2}{mnt}$ dan permukaan air naik dengan kecepatan $\frac{3}{4\pi}\frac{m}{mnt}$, maka berapa kecepatan perubahan jari-jari permukaan air pada saat luas permukaan air $4\pi m^2$ tersebut?

Jawab :

Untuk menyelesaikan soal tersebut harus melibatkan dua rumus sekaligus.

Langkah pertama menggunakan rumus yang kedua yaitu $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial A}\frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$ untuk menghitung debit air, dan selanjutnya menggunakan rumus yang pertama yaitu $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$.

Untuk menghitung $\frac{dr}{dt}$ pada saat luas permukaan air 4 $\pi m^2$ tersebut.

Dari soal diketahui:

$\frac{dA}{dt}$ [ A = 4 $\pi m^2$ ] = $\frac{3}{4}\frac{m^2}{mnt}$

$\frac{dh}{dt}$ [A = 4 $\pi m^2$ ] = $\frac{3}{4\pi}\frac{m}{mnt}$

Ditanyakan:

$\frac{dr}{dt}$ [A = 4 $\pi m^2$ ] = ....

Dari rumus yang kedua didapat:

$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial A}\frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} = \frac{1}{3}h.\frac{3}{4} + \frac{1}{3}A.\frac{3}{4\pi} = \frac{1}{3}.\ 8.\frac{3}{4} + \frac{1}{3}.\ 4.\frac{3}{4\pi} = 3\,\frac{m^3}{mnt}$.

Dari rumus yang pertama yaitu:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3 - \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{3}{4\pi}}{\frac{2}{3}\pi r h}$$

$\frac{dr}{dt}$[ A = $4\pi$ , h = 8 , r = 2 ] = $\frac{3}{16\pi}\frac{m}{mnt}$

Jadi pada saat luas permukaan air $4\pi m^2$, jari-jari permukaan air bertambah panjang dengan kecepatan $\frac{3}{16\pi}\frac{m}{mnt}$.

## PENUTUP

### Simpulan

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa:

1. Untuk menghitung kecepatan gerak benda, fungsi matematika yang menghubungkan variabel-variabel yang mengalami perubahan atau pergerakan dalam suatu kejadian didiferensiasikan terhadap variabel waktu t.
2. Untuk air yang dialirkan kedalam tangki berbentuk tabung, variabel yang mengalami perubahan atau pergerakan adalah volume (V) dan

tinggi (h), yang dihubungkan oleh fungsi matematika V= $\pi R^2$h, variabel R tidak mengalami perubahan (konstan), sehingga ada dua variabel yang berubah yaitu variabel dependen V dan variabel independen h. Jika didiferensiasikan terhadap variabel waktut, maka hasilnya adalah: $\frac{dV}{dt} = \pi R^2 \frac{dh}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ adalah debit air yang dialirkan kedalam tangki dan $\frac{dh}{dt}$ adalah kecepatan naiknya permukaan air.

3. Untuk air yang dialirkan kedalam tangki berbentuk kerucut terbalik, variabel yang mengalami perubahan adalah volume (V), luas permukaan air (A), jari-jari permukaan air (r), tinggi permukaan air (h), dan dihubungkan oleh fungsi matematika: V = $\frac{1}{3}\pi r^2$h dan V = $\frac{1}{3}$Ah. Jika didiferensiasikan terhadap variabel waktu t maka hasilnya adalah: $\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}\pi$ r h$\frac{dr}{dt}$ + $\frac{1}{3}\pi r^2 \frac{dh}{dt}$ dan $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}$ A $\frac{dh}{dt} + \frac{1}{3}$ h $\frac{dA}{dt}$.

4. $\frac{dV}{dt}$ adalah debit air, $\frac{dA}{dt}$ adalah kecepatan perubahan luas permukaan air, $\frac{dr}{dt}$ adalah kecepatan perubahan panjang jari-jari permukaan air, $\frac{dh}{dt}$ adalah kecepatan naiknya permukaan air.

## DAFTAR PUSTAKA


Frank Ayres. 1985. *Kalkulus*. halaman 23. Jakarta: Erlangga.

K.S. Stroud dan Erwin Sucipto. 1989. *Matematika Untuk Teknik*. halaman 220). Jakarta: Erlangga.

K.S. Stroud dan Erwin Sucipto. 1989. *Matematika Untuk Teknik*. halaman 330). Jakarta: Erlangga.

Leithoid, Louis. 1988. *Kalkulus Dan Ilmu Ukur Analitik*. halaman 183. Jakarta: Erlangga.